

# ***Tema 1: Funciones de varias variables***

---

Guión:

- 1.- Nociones básicas.
- 2.- Definición de funciones escalares y vectoriales. Ejemplos.  
Representación gráfica. Dominio.
- 3.- Continuidad de una función varias variables.
- 4.- Diferenciación de funciones:
  - 4.1.- Derivada direccional.
  - 4.2.- Derivada parcial: vector gradiente y matriz Jacobiana.
  - 4.3.- Plano tangente a una superficie en un punto.
  - 4.4.- Derivadas sucesivas. Teorema de Schwarz.  
Matriz Hessiana.

(Secciones del libro Cálculo, autor: Larson: Capítulo 11, 12 y 13).

# 1.-Nociones básicas.

En el espacio vectorial real  $(\mathfrak{R}^n, +, \cdot)$ , podemos establecer las siguientes definiciones de producto escalar, norma y distancia.

Dados:  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  y  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$  dos elementos de  $\mathfrak{R}^n$ , se definen

los siguientes conceptos:

## 1.- Producto escalar euclídeo (o usual):

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \in \mathfrak{R}$$

## 2.- Norma euclídea:

$$\|X\| = +\sqrt{\langle X, X \rangle} = +\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \in \mathfrak{R}^+$$

### 3.- Distancia euclídea:

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = +\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \in \mathbb{R}^+$$

## 2.- Funciones escalares y vectoriales.

### **DEFINICIÓN DE FUNCIÓN ESCALAR:**

Se define una **función escalar** o real de  $n$  variables reales como cualquier aplicación:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \in A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow f(X) = Y \in \mathbb{R}$$

(Siendo  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ).

### **DEFINICIÓN DE FUNCIÓN VECTORIAL:**

Se define una **función vectorial** de  $n$  variables reales como cualquier aplicación:

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \in A \rightarrow F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)) \in \mathbb{R}^m$$

(Siendo  $A$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ ).

## EJEMPLOS

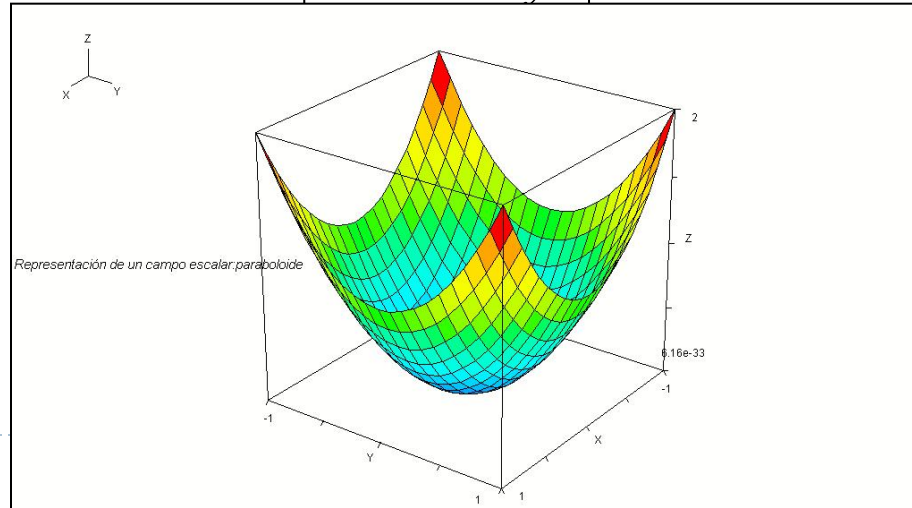
Campos escalares- ejemplo particular: cuádricas.

Paraboloide: su representación viene en tres dimensiones, para cada dos pares de puntos del plano obtenemos un número real que sería gráficamente el valor de “z” que es la altura. La función definida como campo escalar es la siguiente:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

De forma que la ecuación es:  $z = x^2 + y^2$



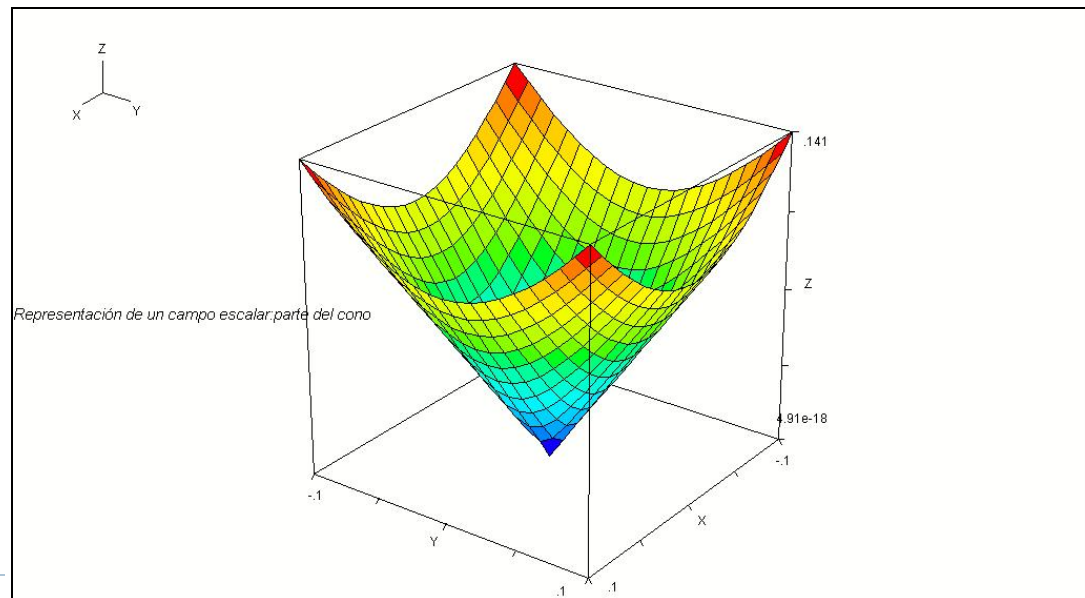
Cono: ocurre lo mismo que en el paraboloide su representación es en  $\mathbb{R}^3$

es decir en el espacio, por ello la función está definida para valores del plano y lo que nos devuelve la función es un número real que como se ha dicho antes representa la altura.

Su función: .En verdad hay dos funciones porque su

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

ecuación es:  $z^2 = x^2 + y^2$ , si despejamos de aquí la  $z$  hay que sacar la raíz positiva y la negativa que representa un cono en la rama positiva del eje  $Z$  y otro en la rama negativa del eje  $Z$ .



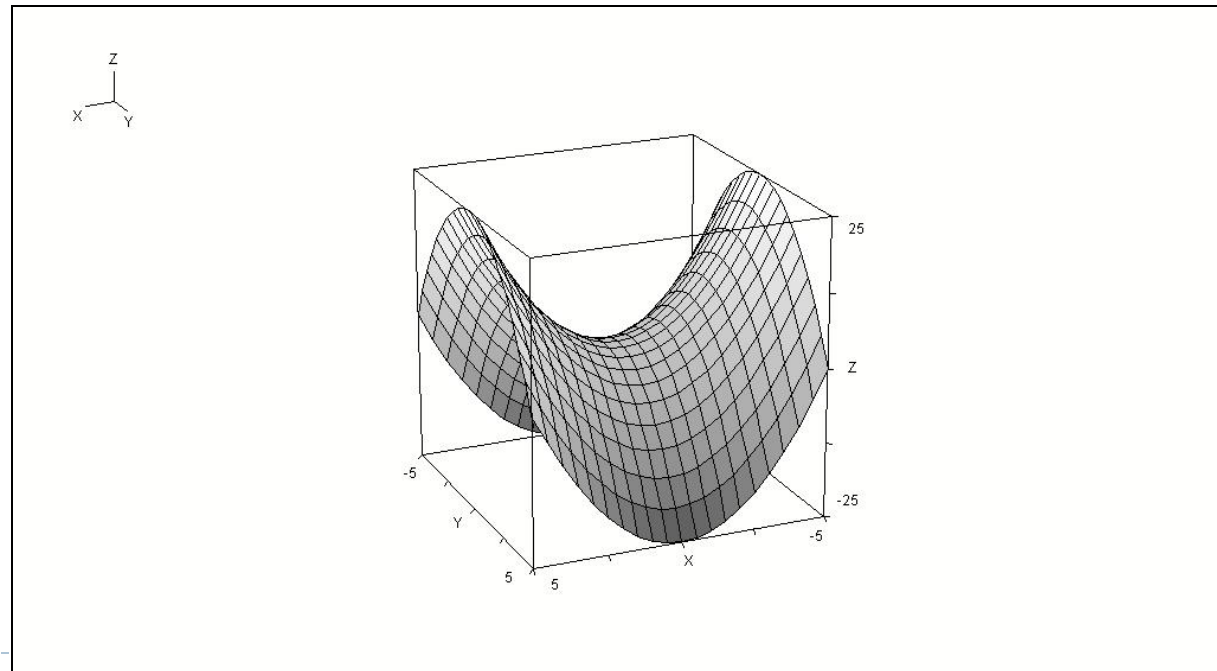
Paraboloide hiperbólico: otro ejemplo de función escalar que forma parte también de una superficie cuádrica.

La definición de la función es la siguiente:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow x^2 - y^2$$

De forma que su expresión es:

$$z = x^2 - y^2$$



## **EJEMPLOS**

Campos vectoriales:

1º.  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $(x, y, z) \rightarrow F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z)) = (x \cdot y \cdot z, x^2 \cdot y)$

2º.  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$   
 $(x, y) \rightarrow F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y), F_3(x, y), F_4(x, y)) = (x, x^3 y, y, x - y)$



# DEFINICIÓN DE DOMINIO O CAMPO DE VARIABILIDAD:

El dominio de una función escalar o vectorial como el conjunto de puntos de  $\mathfrak{R}^n$  que tienen imagen por la función  $f$ , es decir:

$$Dom(f) = \{X \in \mathfrak{R}^n : \exists f(X)\} = A$$

Siendo  $A$  un abierto de  $\mathfrak{R}^n$ .

Si tenemos una función vectorial:

$$F : A \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$$

$$X \in A \rightarrow F(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)) \in \mathfrak{R}^m$$

Para las funciones vectoriales, el dominio coincide con la intersección de los dominios de sus funciones componentes; es decir:

$$Dom(f) = \bigcap_{j=1}^m Dom(f_j)$$



### 3.- Continuidad de una función.

Diremos que una **función escalar**  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es **continua en un punto**  $a \in A$

$$\Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow a} f(X) = f(a)$$

significa que para que una función sea continua el valor del límite tiene que valer lo mismo que la imagen de la función en ese punto.

En el caso particular de las funciones escalares de dos variables, una función será continua en un punto  $(x_0, y_0)$  si:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

La definición de continuidad de **funciones vectoriales** en un punto  $a \in A$ , se puede expresar de forma análoga para cada función componente, es decir, que será continua en dicho punto si lo son todas las funciones componentes en dicho punto.

## 4.- Diferenciación de una función.

### 4.1.- DERIVADA DIRECCIONAL.

Recordemos cuál era la definición de derivada de funciones de una variable:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

El problema que surge con funciones de más de una variable es la cantidad de trayectorias que podemos tomar para acercarnos a un punto. Problema que se solucionó generalizando el concepto de derivada, ello implica que se hable de un punto y de la dirección que se elige: **DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.**

Diremos que una función escalar  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es derivable en un punto  $a \in A$  en la dirección unitaria:  $v \in \mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow \exists \text{ el límite : } D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}$$

Este valor del límite recibe el nombre de **DERIVADA DIRECCIONAL EN EL PUNTO**  $a \in A$  **Y EN LA DIRECCIÓN UNITARIA:**  $v \in \mathbb{R}^n$

## 4.2.- DERIVADAS PARCIALES.

¿A qué llamaremos ahora derivadas parciales? Veamos primero un caso particular: si tuviésemos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir, que tenemos una función de dos variables:

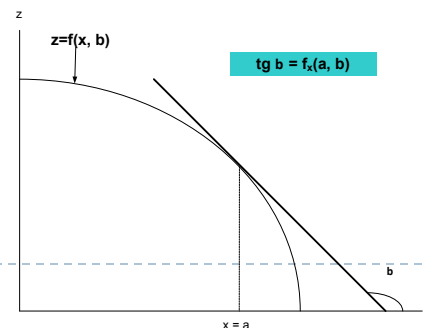
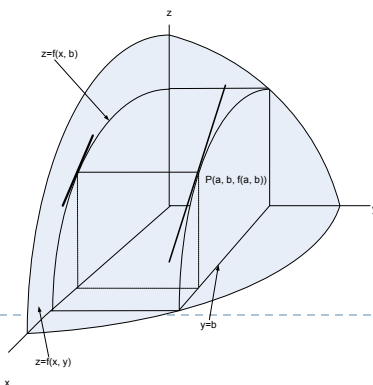
**Si derivamos en la dirección del eje OX**  $\Rightarrow$  la dirección que hay que tomar es el vector  $(1,0)$  y aplicando la definición de antes lo que tenemos es:

Y recibe el nombre de DERIVADA PARCIAL DE  $f$  con respecto a  $x$  en el punto  $(x_0, y_0)$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_{(1,0)}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Corte de  $z = f(x, y)$  con  $y = b$

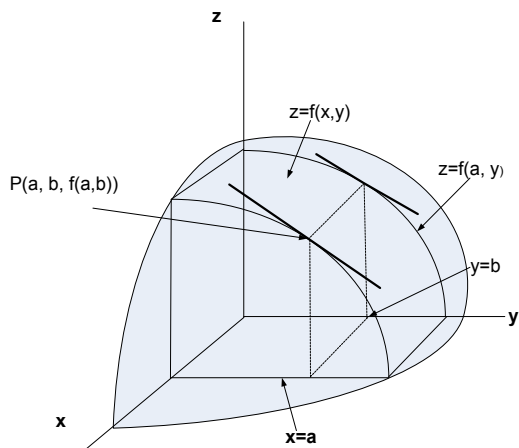
Proyección del corte de  $z = f(x, y)$  con  $y = b$   
sobre el plano ZX



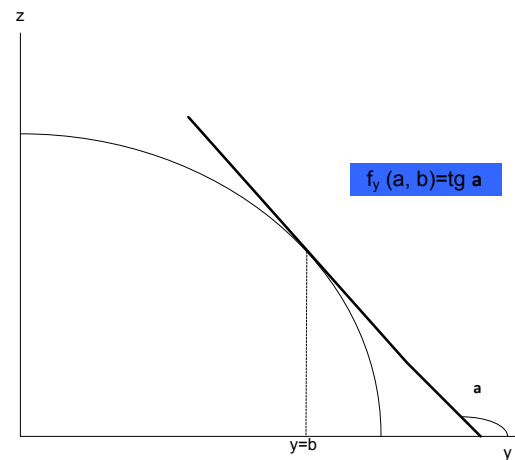
De forma análoga se define LA DERIVADA PARCIAL con respecto a  $y$  en el punto  $(x_0, y_0)$ , teniendo en cuenta que la **dirección del eje OY** es el vector  $(0,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_{(0,1)}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

**Corte de  $z=f(x, y)$  con  $x=a$**



**Proyección del corte de  $z = f(x, y)$  con  $x = a$  sobre el plano ZY**



## OBSERVACIONES IMPORTANTES:

- 1.- Si nos fijamos en la definición del límite que hemos visto como derivada parcial lo que hacemos cuando derivamos con respecto a  $x$  es incrementar sólo dicha variable y la otra la dejamos igual. Y con la  $y$  ocurre lo mismo.
- 2.- Por lo tanto lo que haremos cuando derivemos una función de más de una variable y queremos calcular la derivada parcial con respecto a una variable en concreto eso significará que: EL RESTO DE VARIABLES FUNCIONAN DE FORMA CONSTANTE, MANTENIENDO LAS MISMAS REGLAS DE DERIVACIÓN QUE APRENDIMOS EN LOS AÑOS ANTERIORES.

Generalizando la definición para un el caso en  $\mathbb{R}^n$  :

Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $A$  un abierto.

Se denomina DERIVADA PARCIAL RESPECTO A LA  $i$ -ÉSIMA COMPONENTE, O RESPECTO A LA VARIABLE  $x_i$  a:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}; e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \text{ y } a \in A \subset \mathbb{R}^n$$

# ¿Qué es lo que podríamos definir ahora con lo que sabemos de derivadas parciales?

## IDEA:

- **Un vector (en el caso de los campos escalares)** que almacene las derivadas parciales respecto de todas sus variables.
- **Una matriz (en el caso de los campos vectoriales)** que almacene las derivadas parciales respecto de todas sus variables y todas sus funciones componentes.

Veamos que nombre les vamos a dar:

## DEFINICIÓN DE VECTOR GRADIENTE:

Se representa por:  $\nabla f$  y se calcula sobre funciones escalares:  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Y se define como:

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

## DEFINICIÓN DE MATRIZ JACOBIANA:

La representaremos por  $Jf(a)$  y la calcularemos cuando tengamos funciones vectoriales del tipo

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$a \in A \rightarrow (F_1(a), \dots, F_m(a))$$

Y se define como:

$$JF(a) = \begin{pmatrix} \nabla F_1(a) \\ \dots \\ \nabla F_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**En el caso en que:  $m=n$  tendremos una matriz cuadrada y entonces podremos calcular el determinante de dicha matriz a dicho determinante lo vamos a llamar: JACOBIANO.**



## 4.3.- ECUACIÓN DEL PLANO TANGENTE.

Hasta ahora sabíamos que si queríamos representar una superficie en el espacio teníamos una función de la forma:  $z = f(x, y)$

Esta forma de dar la expresión de la superficie es de forma explícita, si quisiéramos darlo de forma implícita, habría que dar la expresión de la superficie así:  $F(x, y, z) = 0$

Por ejemplo:

1.- La expresión de la esfera es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

2.- La expresión del paraboloide es:

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$$

¿Por qué queremos dar la expresión de la superficie ahora de esta forma?  
Porque el **vector gradiente**  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  **es perpendicular a la superficie**  $F(x, y, z) = 0$  **en el punto**  $(x_0, y_0, z_0)$

Luego para calcular la ecuación del plano tangente es sencillo porque lo único que tenemos que imponer es que el vector tangente a la superficie en ese punto y su vector gradiente sean perpendiculares.

En términos de producto escalar, eso implica que el producto escalar sea nulo.

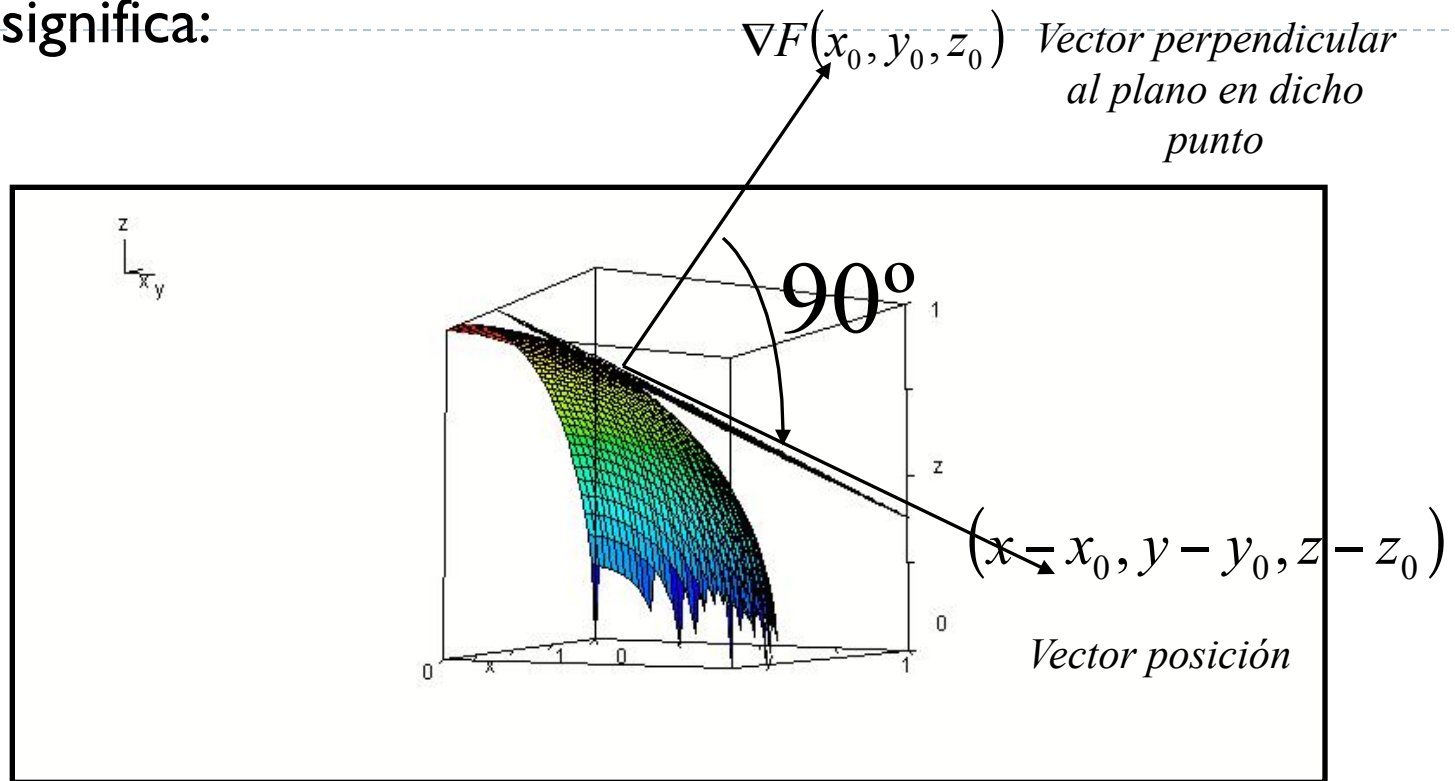
Luego, si  $F$  es diferenciable en  $(x_0, y_0, z_0)$  entonces la ecuación del plano tangente a la superficie dada por la expresión  $F(x, y, z) = 0$  en el punto se obtiene calculando:

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Y de dicho cálculo obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Gráficamente, calcular la ecuación del plano tangente significa:



***Éste es nuestro objetivo: calcular la ecuación matemática de este plano.***

## 4.4.-DERIVADAS DE SEGUNDO ORDEN.

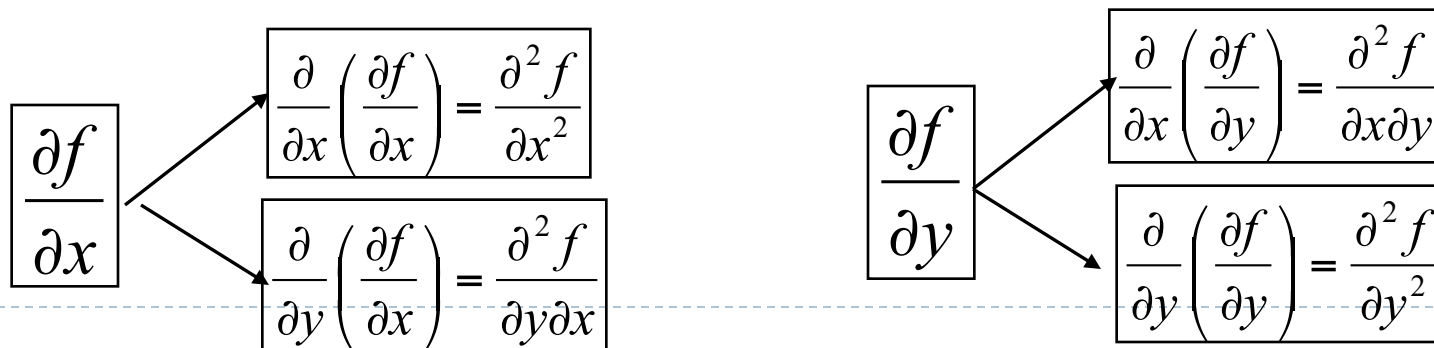
Cuando teníamos una función  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  podíamos calcular su primera derivada y luego las derivadas sucesivas que se denotaba como:  $f^{(n)}(x)$ .

Ahora si tenemos una función de dos variables, es decir:

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Hemos estado calculando las derivadas parciales de primer orden que denotábamos  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Para calcular las de segundo orden tendremos:



## IGUALDAD DE LAS DERIVADAS CRUZADAS.

¿Qué ocurre con las derivadas cruzadas? ¿Daré lo mismo derivar primero  $x$  y luego  $y$ , o primero  $y$  y luego  $x$ ?

Es decir, nuestro problema es ver si:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} ?$$

Veamos primero con un ejemplo que ocurre:

De las funciones siguientes comprobemos que ocurre con las derivadas cruzadas:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(x \cdot y)$$

$$f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

**A qué coinciden!!!!!!!!!!!!!!!, ¿¿¿pero esto es significativo???**

**¿En matemáticas se concluye con un ejemplo para poder afirmar algo?  
NO!!!!!!**

Así que de esto se encargó el matemático **Schwarz** de darnos respuesta: enunciando un teorema.

## TEOREMA DE SCHWARZ.

Dada la función  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  supongamos que  $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}, \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}$   
en un entorno de  $a$  y son continuas en  $a \in A \implies$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

No importa el  
orden en el que  
se deriva

Particularizado en  $\mathbb{R}^2$ ,  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  necesitamos de hipótesis

que  $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \exists \frac{\partial f}{\partial y}$  que sean funciones continuas y con esto podremos

afirmar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

## FUNCIONES DE CLASE $C^k$ .

---

Con todo lo que sabemos hasta ahora podemos definir un nuevo conjunto de funciones para abreviar en un futuro:

Denominamos funciones de clase  $C^1$  a **aquellas funciones que existen sus derivadas parciales de primer orden y dichas funciones son funciones continuas.**

Generalizando, si una función es de clase  $C^k$  significa que  $\exists$  todas las derivadas parciales de orden  $k$  y son funciones continuas.

## DEFINICIÓN DE LA MATRIZ HESSIANA.

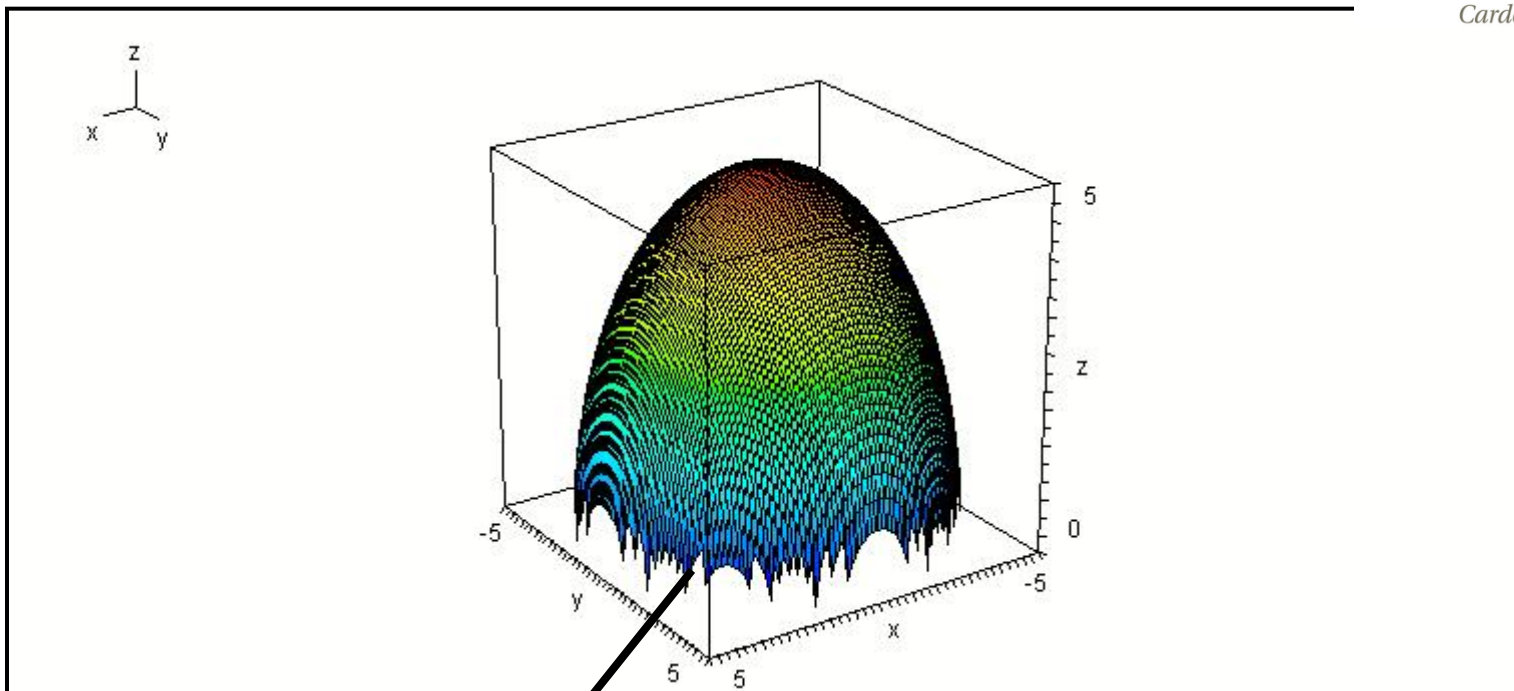
Con las derivadas de segundo orden podemos definir la **MATRIZ HESSIANA**, una de su utilidad que necesitamos nosotros se verá en el siguiente tema porque nos ayuda a determinar la clasificación que tendrán los puntos críticos de la función.

Dada una función  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definimos la **matriz Hessiana** en el punto  $a$  como:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & & \\ & & \dots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

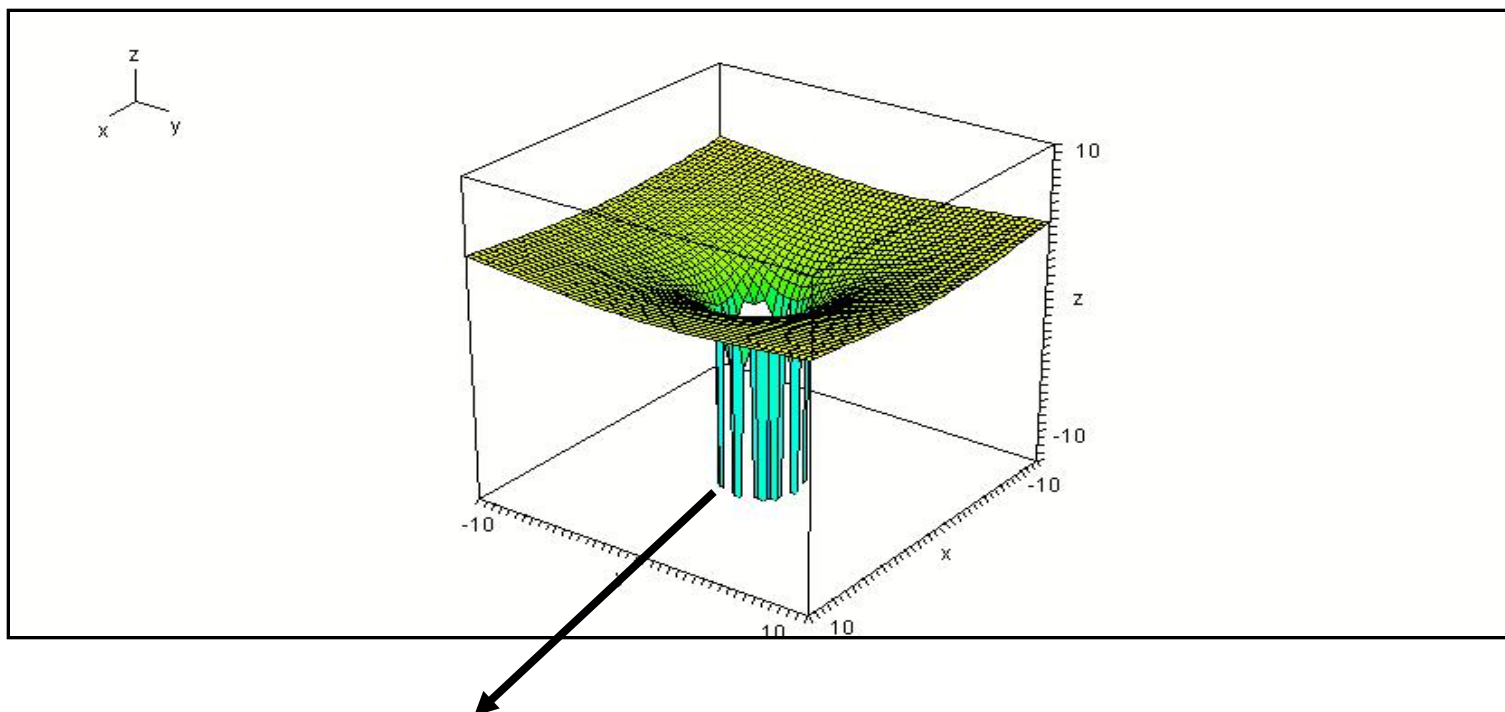


$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$



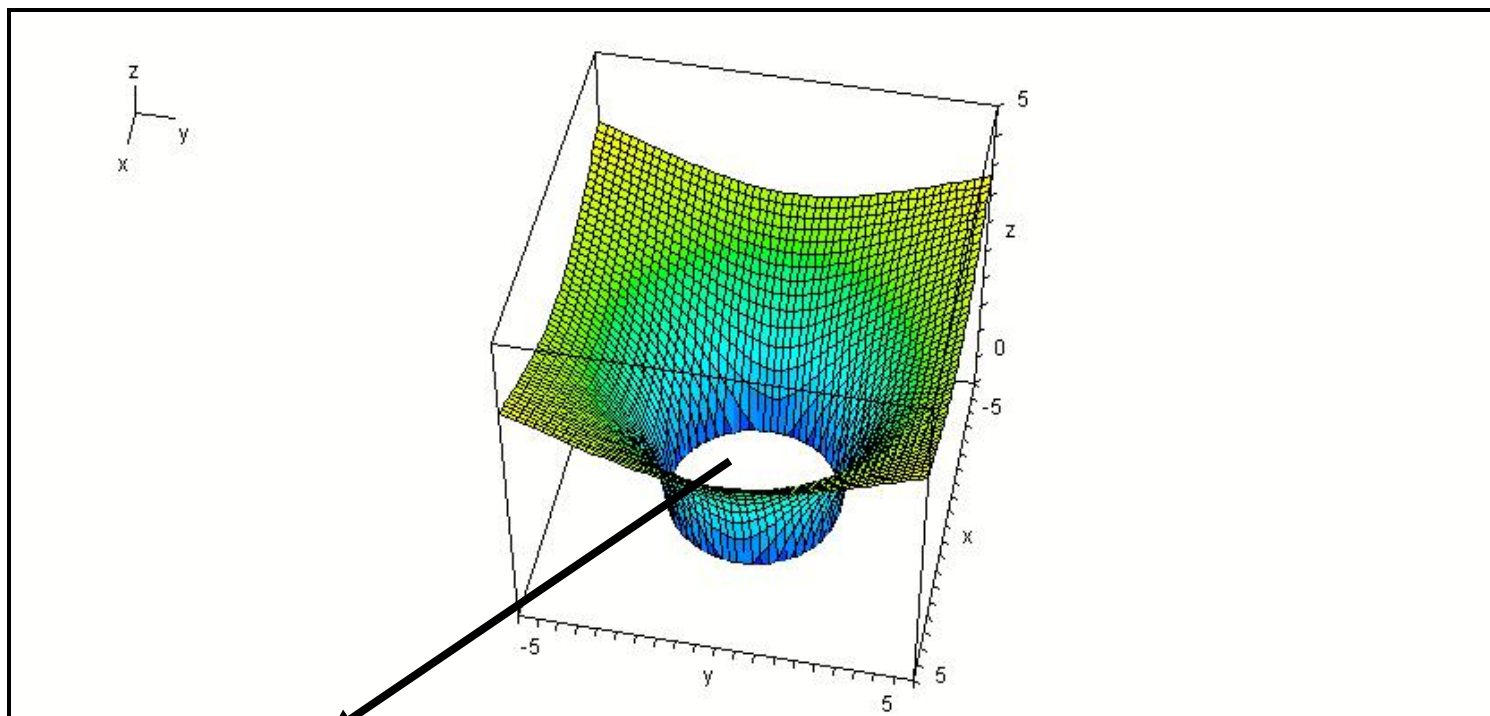
Hay que fijarse en el SUELO (plano XY) para ver el dominio.

$$z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$



Aquí ya se empieza a intuir quien es el dominio de esta función. Veamos mejor otro gráfico.

Ahora sí que se ve mejor quien es el dominio de esta función.

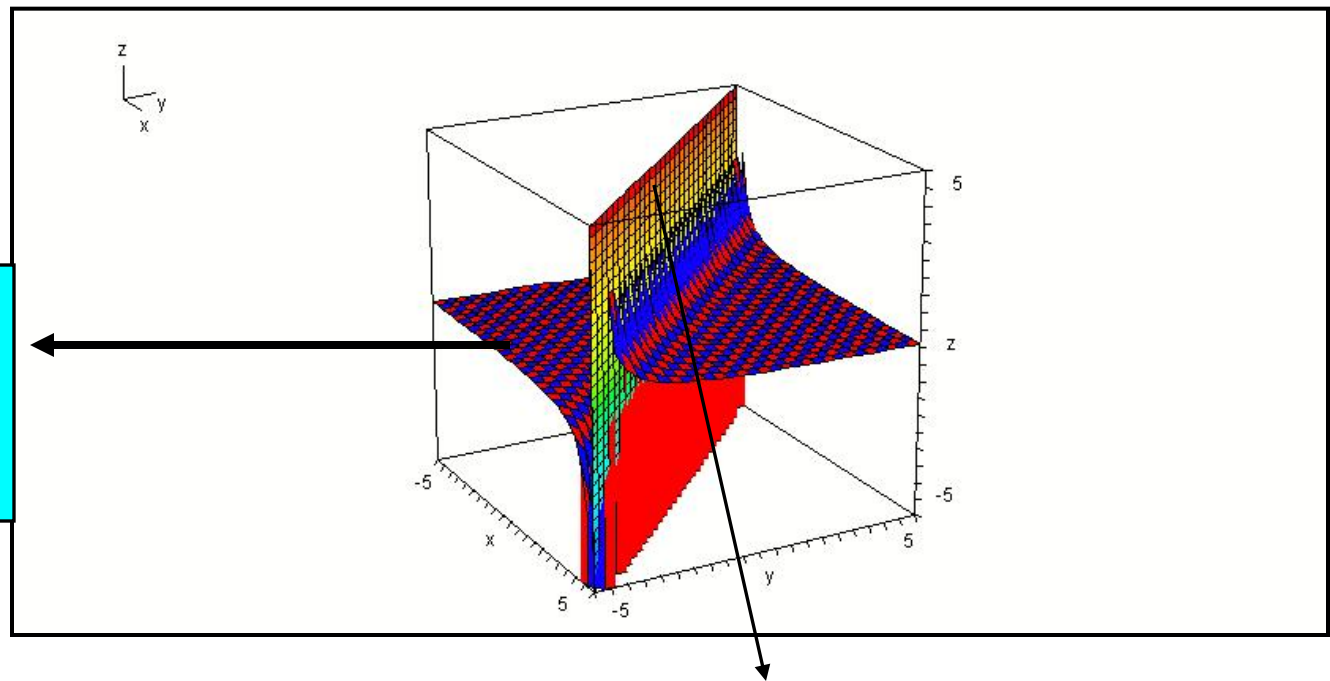


Este círculo de aquí es el que tenemos que quitar, vamos a verlo matemáticamente.

$$z = \frac{1}{x + y}$$

El problema está en el denominador de esta función.  $x + y = 0$

$$z = \frac{1}{x + y}$$



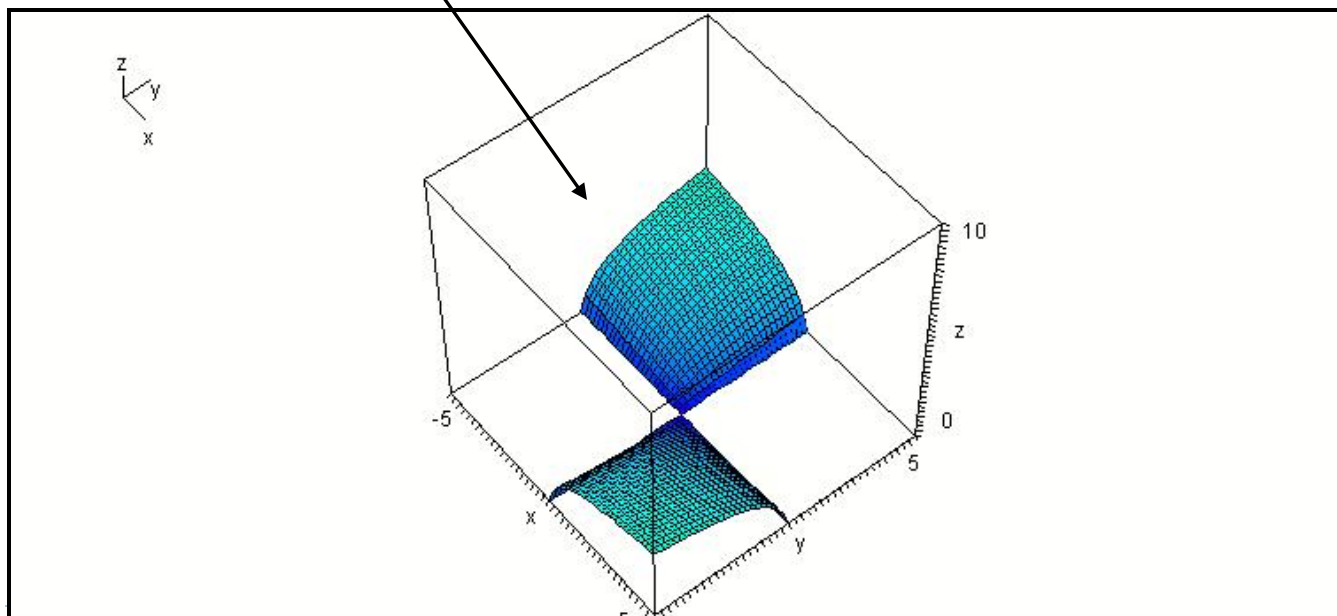
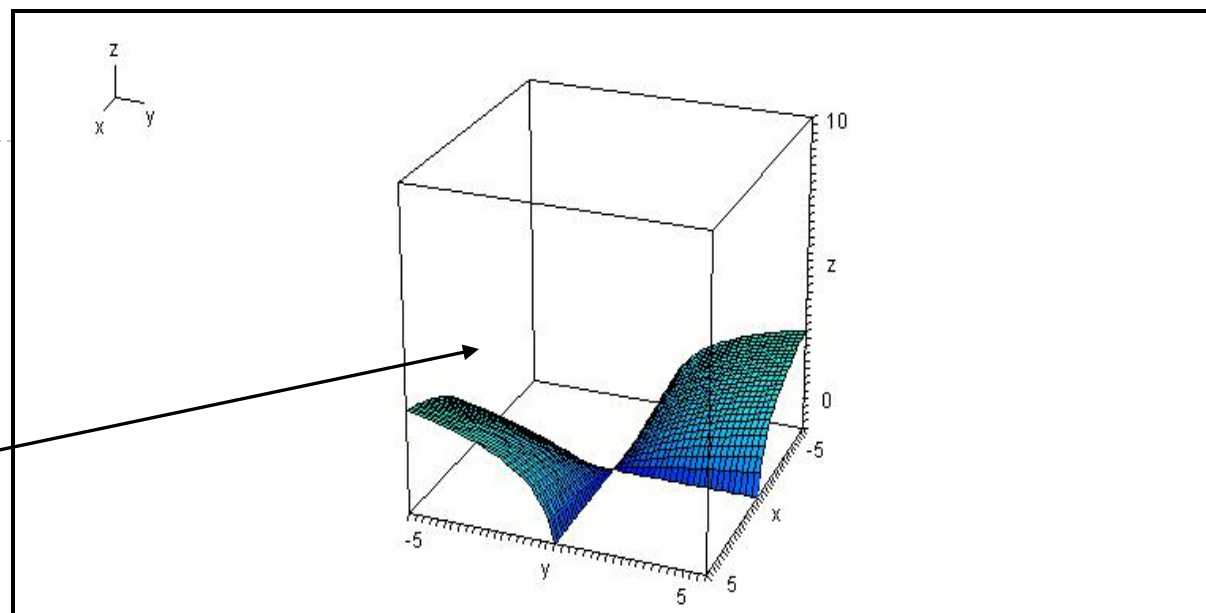
Este plano es:  $y = -x$ , los puntos que quitamos.



CEU

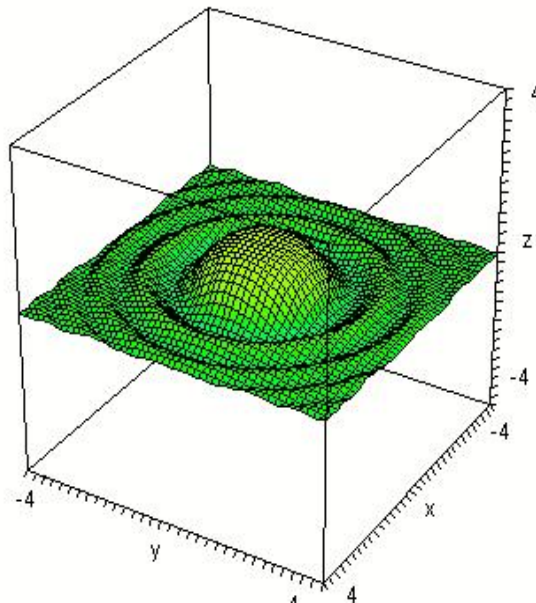
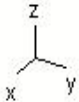
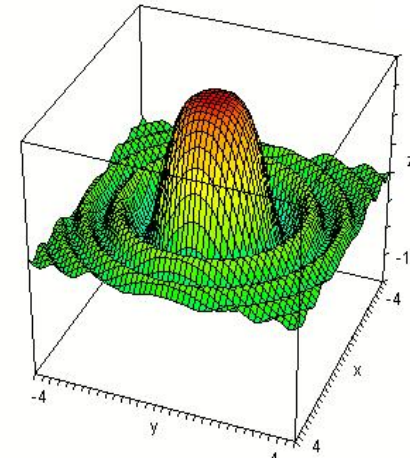
Universidad  
Cardenal Herrera

$$z = \ln(1 - xy)$$





$$z = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}; (x, y) \neq (0,0) \\ 1, (x, y) = (0,0) \end{cases}$$



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

